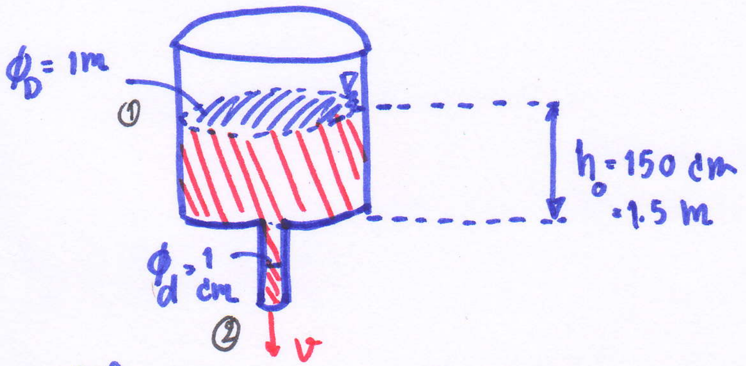
- สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับการไหล

ตัวอย่าง

ถังทรงกระบอก $\phi_D = 1$ m
ท่อด้านล่างของถัง $\phi_d = 1$ cm
ระดับน้ำเริ่มต้น 1.5 m

จงหาการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำ h เมื่อเวลาเปลี่ยนไป และระยะเวลาที่ใช้เพื่อปล่อยน้ำให้ไหลออกจากถังจนหมดถัง



วิธีทำ

สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา

จาก กฎอนุรักษ์พลังงาน $\Rightarrow$ การเปลี่ยนรูปพลังงาน

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

T: พลังงานจลน์ $= \frac{1}{2}mv^2$

V: พลังงานศักย์ $= mgh$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

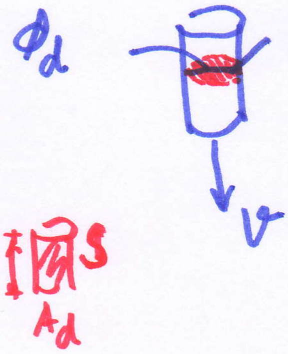
แต่ในความเป็นจริง ระหว่างที่ของไหลเคลื่อนที่จะมีความสูญเสีย (loss) เกิดขึ้น

$$v = c\sqrt{2gh}$$

โดยที่ c = สัมประสิทธิ์การสูญเสียของการไหล

$$c \leq 1$$

พิจารณา ปริมาตร ของน้ำ ที่ไหลออกจาก ท่อ $\Rightarrow \Delta \forall_d$

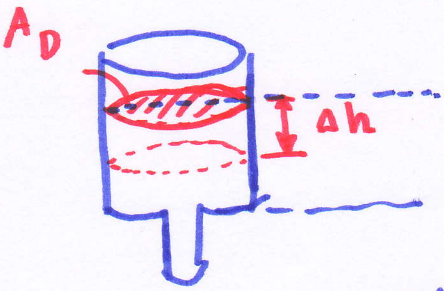


A_d = พื้นที่หน้าตัดของท่อ

$$\Delta \forall_d = A_d s \quad ; \quad s = v\Delta t$$

$$\Delta \forall_d = A_d v \Delta t$$

พิจารณา ปริมาตร ของน้ำ ที่ลดลง ในถัง



$$\Delta \forall_D = -A_D \Delta h$$; เครื่องหมายลบ หมายถึง ปริมาตรน้ำที่ลดลง

ปริมาตรน้ำ ที่ ไหลออก จากท่อ = ปริมาตรน้ำที่ลดลง ในถัง

$$\Delta \forall_d = \Delta \forall_D$$

$$A_d v \Delta t = -A_D \Delta h$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \cancel{\frac{A_D}{A_d}} - \frac{A_d}{A_D} v \quad ; \quad v = c\sqrt{2gh}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{A_d}{A_D} c\sqrt{2gh}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{A_d}{A_D} c \times \sqrt{2g} \times \sqrt{h}$$

เทอม $-\frac{A_d}{A_d} c \times \sqrt{2g} \Rightarrow$ ค่าคงที่ $= -K$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -K\sqrt{h}$$

$\Delta t \to 0$
$$\frac{dh}{dt} = -K\sqrt{h}$$

หาผลเฉลย ของ สมการ

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\,dh = -k\,dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}}\,dh = \int -k\,dt$$

$$2h^{+\frac{1}{2}} = -kt + c_1$$

$$2\sqrt{h} = -kt + c_1$$

หาค่า k

$$k = \frac{A_d}{A_D} c \times \sqrt{2g} \quad ; \text{กำหนด } c = 0.79$$

$$= \frac{\pi[0.01]^2/4}{\pi[1]^2/4} \times 0.79 \times \sqrt{2 \times 9.81}$$

$$k = 3.5 \times 10^{-4}$$

หาค่า c_1 $\Rightarrow$ เมื่อ $t = 0$, $h_0 = 1.5$ m

$$2\sqrt{1.5} = -3.5 \times 10^{-4} \times 0 + c_1$$

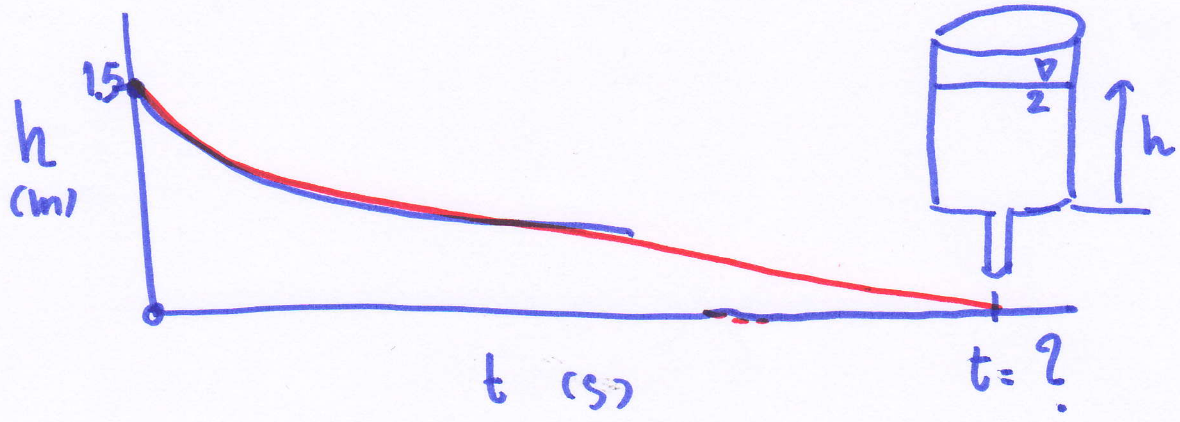
$$c_1 = 2.45$$

ผลเฉลย ของ การ เปลี่ยนแปลง ระดับ ใน ถัง

$$2\sqrt{h} = -3.5 \times 10^{-4}\,t + 2.45$$

$$\sqrt{h} = \frac{1}{2}\left[-3.5 \times 10^{-4}\,t + 2.45\right]$$

$$h = \left[-1.75 \times 10^{-4}\,t + 1.225\right]^2 \quad *$$



หา t เมื่อ $h = 0$

$$2 \times \sqrt{0} = -3.5 \times 10^{-4}\, t + 2.45$$

$$t = 7000 \text{ s}$$

$$\int u^{-2}\, du = \frac{1}{(-2+1)} u^{-2+1} = -1\, u^{-1}$$

- สมการเชิงอนุพันธ์ ที่เกี่ยวกับ การสลายตัว ของสสาร (1 ข้อ)

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\frac{dm}{dt} = km$$

$$\frac{1}{m}\,dm = k\,dt$$

$$\int \frac{1}{m}\,dm = \int k\,dt$$

$$\ln m = kt + c$$

$$e^{\ln m} = e^{kt+c}$$

$$m = e^{kt} \cdot e^{c} \; ; \; A = e^{c}$$

$$m = Ae^{kt}$$

ถ้า กำหนด $k = -4.415 \times 10^{-4}$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ ของ การสลายตัว

และ กำหนด มวล เริ่มต้น เท่า กับ 2 g

$$m = Ae^{kt}$$

$$m = Ae^{-4.415\times10^{-4}\,t}$$

$t = 0, \quad m = 2$

$$2 = Ae^{-4.415\times10^{-4}\times 0}$$

$$2 = A$$

สมการ ของ ผลเฉลย $\Rightarrow$ $m = 2e^{-4.415\times10^{-4}\,t}$

ที่ผ่านมา เราศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยใช้วิธีแยกตัวแปร

$$\cancel{f(x)} \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \,.\, f(y)$$

$$\frac{1}{f(y)}\, dy = f(x)\, dx$$

$$\int \frac{1}{f(y)}\, dy = \int f(x) dx$$

สมการที่สามารถแยกตัวแปรเป็น x และ y ได้ เราเรียกว่า Separable eq.

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\frac{dy}{dx} = y e^{-x} \Rightarrow \frac{1}{y} dy = e^{-x} dx$$

$$\sin x\, dx + y\, dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y - y}{y+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y[x^2-1]}{y+1}$$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{y} dy = [x^2-1] dx$$

$$\left[\frac{y}{y} + \frac{1}{y}\right] dy = [x^2-1] dx$$

$$[1 + \frac{1}{y}] dy = [x^2-1] dx$$

บางสมการเชิงอนุพันธ์ ไม่สามารถแยกตัวแปรได้ เรามีหลายวิธีที่จะใช้แก้สมการ แต่ละวิธี ขึ้นอยู่กับลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งจะขอยกตัวอย่าง

สมการเชิงอนุพันธ์ $\Rightarrow$ Homogeneous eq.

$\Rightarrow$ Linear eq.

- Homogeneous eq.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

<u>ตัวอย่าง</u>

1. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y/x}{1-y/x}$$

2. $$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

3. $$x^2\frac{dy}{dx} - 3xy - 2y^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xy + 2y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{y}{x} + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

สมการ แบบ เอกพันธ์ ของ ตัวแปร

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} \quad ; \quad y(1) = 0$$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

กำหนด ให้ $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{dx}{dx} + x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2$$

$$x\frac{dv}{dx} = v^2 + 2v + 1$$

$$x\frac{dv}{dx} = (v+1)^2$$

$$\frac{1}{(v+1)^2}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

ให้ $u = v+1 \Rightarrow \frac{du}{dv} = 1 \Rightarrow dv = du$

$$\int \frac{1}{u^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{u} = \ln x + c.$$

$$u = \frac{-1}{\ln x + c}$$

$$v + 1 = \frac{-1}{\ln x + c}$$

$$\frac{y}{x} + 1 = \frac{-1}{\ln x + c}$$

เมื่อ $x = 1$, $y = 0$

$$\frac{0}{1} + 1 = -\frac{1}{\ln 1 + c}$$

$$1 = \frac{-1}{c}$$

$$c = -1$$

ผลเฉลย

$$\boxed{\frac{y}{x} = \frac{-1}{\ln x - 1} - 1}$$

- Linear eq.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = q(x)$$

ผลเฉลย $$y = \left[\int q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + c \right] e^{-\int P(x)dx}$$

Quiz

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$x e^{-x^2} dx + (y^5 - 1)\, dy = 0$$

เมื่อ $y(0) = 0$